

Aller-retour vers l'inséparable

Sylvain Maugeais

Résumé

Nous construisons des morphismes inséparables entre courbes de genre ≥ 2 qui proviennent par dégénérescence de morphismes séparables.

Soient R un anneau de valuation discrète de caractéristique résiduelle > 0 et $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un R -morphisme fini génériquement séparable entre courbes propres et lisses. Se peut-il que le morphisme induit par f au-dessus du point fermé de $\text{Spec} R$ soit inséparable ? En d'autres termes, peut-on dégénérer du séparable vers l'inséparable ? Lorsque le genre de \mathcal{X} est ≤ 1 , il est aisé de construire des exemples mais lorsque ce genre est ≥ 2 cela devient plus compliqué. Par exemple, Deligne et Mumford ont montré dans [DM69] que cela ne pouvait pas se passer dans le cas d'un morphisme f galoisien.

Le but de cet article est de donner un critère simple (dans le cas où le degré d'inséparabilité est petit) pour répondre à cette question, puis de produire des exemples explicites.

L'étude classique des déformations de morphismes ne donne malheureusement pas beaucoup d'information à ce sujet. En effet, les obstructions à la déformation ne sont pas locales dans le cas d'un morphisme inséparable, ceci rend l'étude particulièrement difficile.

Pour contourner ce problème, nous introduisons dans le présent article la notion de morphismes rigidifiés qui consiste en la donnée d'un morphisme f entre courbes lisses et d'une décomposition de l'homomorphisme df , induit sur les faisceaux de différentielles, sous la forme $df = \xi\delta$ où ξ est une constante (éventuellement nulle) et δ est un homomorphisme *injectif dans chaque fibre* et qui envoie les formes exactes sur des formes exactes. Cette condition technique intervient naturellement dans l'étude des dégénérescences de morphismes entre courbes lisses en *égales caractéristiques* et permet ensuite de répondre au cas de l'inégale caractéristique par un argument global sur des espaces de modules.

Une fois cette définition posée, nous procédons à l'étude des déformations des morphismes rigidifiés ayant un degré d'inséparabilité au plus égal à la caractéristique et montrons que ce problème est non obstrué (cf. Théorème 3.1). Un corollaire immédiat nous permet de démontrer le théorème suivant

Théorème 0.1 *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme fini entre courbes propres et lisses au-dessus d'un corps de caractéristique p . Supposons que f se décompose en $h \circ F$ où F est purement inséparable de degré p et h est séparable.*

Alors f provient par dégénérescence en égale caractéristique d'un morphisme séparable si et seulement si $\text{Hom}(h^\Omega_{Y/k}, B_X^1) \neq \{0\}$ (B_X^1 désignant le faisceau des différentielles exactes).*

En particulier, on peut constater que ce théorème ne dit rien sur les morphismes dont le degré d'inséparabilité est $> p$, non plus que sur les déformations vers la caractéristique 0. Ce deuxième problème peut être contourner utilisant un raisonnement sur des espaces de modules, mais on obtient alors seulement une condition nécessaire (cf. corollaire 3.5). Par contre, nous ne pouvons pas, à l'heure actuelle, déformer des morphismes de gros degré d'inséparabilité.

Une fois ce critère en main, le problème est de montrer qu'il existe des morphismes de degré d'inséparabilité p qui admette une structure de morphisme rigidifié, ce qui se trouve être une condition très forte. Il est assez aisé de trouver des conditions nécessaires (cf. section 4) mais plus difficile de trouver des conditions suffisantes, c'est ce qui est fait dans la dernière partie de ce travail, cf. exemple 5

Remerciements : Je souhaite remercier Qing Liu pour m'avoir posé la question des relèvements de morphismes inséparables.

1 Définition

Dans tout cet article, les démonstrations se font souvent en se ramenant au cas des séries formelles. Ceci est justifié par le lemme suivant.

Lemme 1.1 *Soit S un schéma d'égale caractéristique $p > 0$ et $X \rightarrow S$ une courbe lisse. Soit ω une forme différentielle sur X . Alors*

- i) ω est localement exacte si et seulement si elle l'est sur $X \times_S S'$ pour $S' \rightarrow S$ fidèlement plat.*
- ii) ω est localement exacte si et seulement si pour tout point $\mathfrak{p} \in X$, l'image de ω dans $\Omega_{X/S} \otimes_X \widehat{\mathcal{O}}_{X,\mathfrak{p}}$ est exacte.*

Pour montrer ce lemme, il convient d'introduire quelques notations : notons $F: X \rightarrow X^{(p)}$ le Frobenius relatif et $B_{X/S}^1$ l'image de $d: X \rightarrow \Omega_{X/S}$. Alors le faisceau $F_*B_{X/S}^1$ est naturellement un sous-faisceau cohérent plat de $F_*\Omega_{X/S}$: c'est le noyau de l'opérateur de Cartier relatif $C: F_*\Omega_X \rightarrow \Omega_{X^{(p)}}$. On identifiera souvent $B_{X/S}^1$ à son image via F_* .

Le lemme ci-dessus est alors une conséquence immédiate de la cohérence de $F_*B_{X/S}^1$.

Définition 1.2 Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme fini entre S courbes lisses (non nécessairement propres). Un homomorphisme $\delta: \Omega_{Y/S} \rightarrow f_*\Omega_{X/S}$ sera dit f -exact s'il induit un homomorphisme $B_{Y/S}^1 \rightarrow f_*B_{X/S}^1$ (i.e. il envoie une forme localement exacte sur une forme localement exacte).

L'exemple le plus simple d'homomorphisme exact est l'homomorphisme df . Pour toute forme localement exacte $\omega = dh$ on a $df(\omega) = d(f(h))$.

Lemme 1.3 *Supposons que S est le spectre d'un corps et que f est inséparable. Alors l'ensemble des homomorphismes f -exact s'identifie à $\text{Hom}(\Omega_Y, f_*B_X^1)$.*

Si on a de plus une décomposition $f = h \circ F$, alors

$$\text{Hom}(\Omega_Y, f_*B_X^1) = \text{Hom}(h^*\Omega_Y, F_*B_X^1).$$

Preuve : Soit δ un homomorphisme f -exact. Au voisinage de chaque point de Y , il existe une base ω de Ω_Y qui est localement exacte. En particulier, $\delta(\omega) = dx \in f_*B_{X/S}^1$. Comme f est inséparable, pour tout élément $\alpha \in Y$ on a $d(f(\alpha)) = 0$ et donc $\delta(\alpha\omega) = f(\alpha)\delta(\omega) = f(\alpha)dx = d(f(\alpha)x)$. Donc δ est à valeurs dans $f_*B_{X/S}^1$.

La dernière assertion vient par adjonction. \square

Définition 1.4 Un morphisme rigidifié au-dessus d'un anneau local A consiste en la donnée d'un triplet (f, δ, ξ) où f est un morphisme fini entre A -courbes propres et lisses, δ un homomorphisme f -exact non nul au-dessus de chaque point de A , $\xi \in A$ tels que $df = \xi\delta$.

Il existe une action naturelle de \mathbb{G}_m sur les morphismes rigidifiés donnée par $\alpha.(f, \delta, \xi) = (f, \alpha\delta, \alpha^{-1}\xi)$, ce qui complique une éventuelle définition de ce que pourrait être des morphismes rigidifiés sur une base globale (il suffit toutefois de considérer le champ quotient afin d'obtenir un objet global). Nous n'utiliserons ici que des considérations locales !

Le fait que δ soit non nul en chaque point équivaut en fait à ce que l'homomorphisme $f^*\Omega_Y \rightarrow \Omega_X$ induit par adjonction ait un conoyau fini plat sur A . En particulier la notion de morphisme rigidifié est stable par changement de base.

Proposition 1.5 *Le morphisme sous-jacent d'un morphisme rigidifié (f, δ, ξ) est séparable au-dessus d'un point $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ si et seulement si ξ est inversible en \mathfrak{p} .*

Un morphisme f entre A -courbes propres et lisses qui est séparable au-dessus de chaque point de A possède une structure canonique de morphisme rigidifié : $(f, df, 1)$.

2 Dégénérescence

La notion de morphisme rigidifié est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Soit R un anneau de valuation discrète d'égales caractéristiques p et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme fini entre R -courbes propres et lisses. Supposons que f est séparable à la fibre générique. Alors f peut être muni d'une structure de morphisme rigidifié.*

Preuve : Considérons la partie verticale du diviseur de ramification : c'est un multiple de la fibre spéciale de X . Comme celle-ci est réduite, ce diviseur est de la forme (ξ) avec $\xi \in R$. Posons $\delta = \frac{df}{\xi}$. Comme R est d'égale caractéristique, δ est f -exacte. Pour montrer cette dernière assertion, on se ramène au cas d'un morphisme $f: R[[y]] \rightarrow R[[x]]$ par changement de base fidèlement plat, localisation et complétion. Par suite, comme R est d'égales caractéristiques, un élément $\omega = (\sum a_i x^i)dx$ est exact si et seulement si $a_i = 0$ pour tout $i = -1 \pmod p$. Ceci impose que $\frac{\omega}{\xi}$ est exacte. \square

Soit R un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$ de valuation v et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme fini entre S -courbes propres et lisses et notons p^i le degré d'inséparabilité à la fibre spéciale. Notons ξ un générateur de la partie verticale du diviseur de ramification. Comme dans le cas d'égales caractéristiques, l'homomorphisme $\frac{df}{\xi}$ a encore un sens mais n'est plus exacte en général. Toutefois, ξ ne peut pas être quelconque. En effet, notons v la valuation sur R .

Lemme 2.2 *On a $v(\xi) \leq v(p^i)$.*

Preuve : Se placer en un point de la fibre spéciale en lequel f se décompose en étale + purement inséparable et se ramener ainsi à l'étude de $f: R[[y]] \rightarrow R[[x]]$ où f est purement inséparable à la fibre spéciale. Il suffit alors de regarder $d(f(y))$. \square

Proposition 2.3 *Supposons que le degré d'inséparabilité à la fibre spéciale soit p et que $v(\xi) < v(p)$. Alors il existe un homomorphisme f -exact non trivial.*

Preuve : Il suffit de montrer que $\frac{df}{\xi}$ est f -exact. Pour cela, on se ramène, par localisation puis completion au cas des séries formelles $R[[x]]$ et on le démontre explicitement. \square

Si on retire l'hypothèse que $v(a) < v(p)$, alors ce résultat n'est plus vrai, comme le montre l'exemple suivant : considérons le morphisme $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1$ défini par $x \mapsto x^p$. Ce morphisme ne donne pas naissance à un homomorphisme exact à la fibre spéciale !

3 Théorie de la déformation

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soient $(f_0: X_0 \rightarrow Y_0, \delta_0, 0)$ un morphisme rigidifié entre courbes propres et lisses au-dessus d'un corps parfait k , A un anneau noethérien, local complet de caractéristique p et de corps résiduel k , et $\xi \in A$. Si le degré d'inséparabilité de f_0 est au plus p , alors il existe un morphisme rigidifié $(f: X \rightarrow Y, \delta, \xi)$ qui soit une déformation de $(f_0, \delta_0, 0)$.*

Le cas où f est séparable est bien connu : c'est un corollaire assez direct de la théorie des déformations des morphismes telle qu'exposée dans [Ran89]. Dans la suite, nous utiliserons cette théorie librement (en particulier la classification des automorphismes de déformations).

Le cas séparable étant réglé, nous supposons désormais que le degré d'inséparabilité de f à la fibre spéciale est exactement p . En particulier, le morphisme est inséparable.

On se donne donc $(f_0: X_0 \rightarrow Y_0, \delta_0, 0)$ un morphisme rigidifié au-dessus d'un corps k et $(f: X \rightarrow Y, \delta, \xi)$ une déformation au-dessus d'un anneau artinien A de caractéristique p et de corps résiduel k .

Lemme 3.2 Soit $A' \rightarrow A$ une petite extension et $(\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}, \tilde{\delta}, \tilde{\xi})$ une déformation de $(f: X \rightarrow Y, \delta, \xi)$. Alors le groupe des automorphismes de cette déformation est naturellement isomorphe au noyau du morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\Omega_{X_0, X_0}) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(\Omega_{Y_0, \Omega_{X_0}}) \\ \chi & \mapsto & d \circ \chi \circ \delta. \end{array}$$

En particulier, son image directe par le Frobenius absolu est cohérente (et donc sa cohomologie sur un schéma affine est triviale).

Preuve : A priori, un automorphisme de déformation de (f, δ, ξ) est un élément $(\sigma, \tau) \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}) \times \mathrm{Aut}(\tilde{Y}) \cong \mathrm{Hom}(\Omega_{X_0, X_0}) \times \mathrm{Hom}(\Omega_{Y_0, Y_0})$. En utilisant la compatibilité $f = \tau \circ f \circ \sigma$ et le fait que f est inséparable à la fibre spéciale, on trouve que $\tau = \mathrm{Id}$.

Le résultat s'ensuit en écrivant explicitement l'action de $\mathrm{Hom}(\Omega_{X_0, X_0})$ sur δ . \square

Lemme 3.3 Supposons A artinien, X et Y affine, δ est un isomorphisme et à la fibre spéciale le morphisme f_0 est la composée d'un morphisme étale et d'un morphisme purement inséparable de degré p . Donnons nous une petite extension $A' \rightarrow A$ de noyau (ϵ) et deux relèvements (f_1, δ_1, ξ) et (f_2, δ_2, ξ) (on a le même ξ). Alors il existe des automorphismes de déformations $\phi \in \mathrm{Aut}_X(X_1)$ et $\psi \in \mathrm{Aut}_Y(Y_1)$ tels que $f_2 = \psi \circ f_1 \circ \phi$ et $\delta_1 = d\phi \circ \delta_2 \circ d\psi$.

Preuve : Comme X et Y sont lisses et affines, on peut supposer que $X_1 = X_2$ et $Y_1 = Y_2$.

Choisissons une base locale dx de Ω_X et une base dy de Ω_{Y_0} (ce qui peut toujours se faire, quitte à réduire X et Y) de sorte que $\mathrm{Ext}^0(\Omega_{X_0, X_0}) = X_0 \frac{\partial}{\partial x}$. On a $\delta_1(dy) - \delta_2(dy) = \epsilon Q dx$ avec $Q \in X_0$. Notons $\delta_1(dy) = \alpha dx$. Par hypothèse, δ_1 est un isomorphisme donc α est inversible. Posons $h_1 = Q/\alpha$. Alors le champ de vecteurs $\epsilon h_1 \frac{\partial}{\partial x}$ définit un automorphisme de X_1 qui est trivial sur X donné par $\phi_1(u) = u + \epsilon u' h_1$.

On a alors

$$\begin{aligned} d\phi_1(\delta_1(dy)) &= d\phi_1(\alpha dx) = (\alpha + \epsilon \alpha' h_1)(dx + \epsilon h_1' dx) = \\ &= \alpha dx + \epsilon(\alpha h_1)' dx = \delta_1(dx) + Q dx = \delta_2 dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\delta_2 = d\phi_1 \circ \delta_1$.

On peut donc remplacer f_1 par $f_1 \circ \phi_1$ et supposer que $df_1 - df_2 = \xi(\delta_1 - \delta_2) = 0$.

Comme f est inséparable à la fibre spéciale, $\mathrm{Aut}_Y(Y_1)$ agit trivialement sur δ_1 et sur df_1 . En effet, un élément de $\mathrm{Aut}_Y(Y_1)$ est de la forme $\mathrm{Id} + \epsilon \beta \frac{\partial}{\partial y}$ et donc on a

$$\delta_1(dy + \epsilon \beta dy) = f(1 + \epsilon \beta) \delta_1(dy) = (1 + \epsilon \beta f_0') \delta_1(dy) = \delta_1(dy)$$

car $f_0' = 0$.

On a naturellement $f_1 - f_2 \in (\epsilon) \otimes \mathrm{Hom}(\Omega_{Y_0/k}, f_{*X_0})$. Décomposons à la fibre spéciale $f = s \circ i$ avec $s: Z_0 \rightarrow Y_0$ étale et $i: X_0 \rightarrow Z_0$ purement inséparable.

Comme $df_1 - df_2 = 0$ et que i est de degré exactement p on voit que $f_1 - f_2$ est en fait dans $(\epsilon) \otimes \text{Hom}(\Omega_{Y_0/k}, s_*Z_0)$ (on peut se ramener au cas des séries formelles par localisation complétion, on voit alors que f_1 et f_2 coïncident sur les monômes de degré premiers à p car $df_1 - df_2 = 0$, il s'ensuit que $f_1 - f_2$ est en fait une puissance p -ième, c'est-à-dire dans l'image de s_*Z_0). Or s est étale, donc $\text{Hom}(\Omega_{Y_0/k}, Y_0)$ agit transitivement sur $\text{Hom}(\Omega_{Y_0/k}, s_*Z_0)$ (unicité de la déformation d'un morphisme étale). Il existe donc un automorphisme de Y envoyant f_1 sur f_2 .

On obtient alors le cas affine par recollement en utilisant le lemme 3.2 et le fait que ce faisceau a un premier groupe de cohomologie triviale. \square

On remarquera que la démonstration précédente ne fonctionne pas si le morphisme purement inséparable est de degré p^2 car, si $X = \text{Spec}k[[x]]$, $Y = \text{Spec}k[[y]]$ et $f(y) = \sum a_i x^i$, alors l'information différentielle donne les informations sur les a_i avec $p \nmid i$, la décomposition de f en étale + séparable donne des informations sur les a_{pi} $p \nmid i$, mais on n'a pas d'information sur les a_{p^2i} !

Lemme 3.4 *Soit $A' \rightarrow A$ une petite extension et $\tilde{\xi}$ un relèvement de ξ . Alors il existe un relèvement $(\tilde{f}, \tilde{\delta}, \tilde{\xi})$ de (f, δ, ξ) à A' .*

Preuve : Le morphisme f se relève localement (car c'est un morphisme localement d'intersection complète) et δ également (choix d'une base, ce qui est possible car $Z_{X/S}^1$ est localement libre). Il s'agit alors de voir qu'on peut les choisir de sorte que $df = a\delta$.

Pour cela, regardons $df(dy) - a\delta(dy) = \epsilon d(Q)$ (ce qui est possible car df et δ sont tout deux exacts). Par suite, changeant f en $f + \epsilon Q \frac{\partial}{\partial x}$ (i.e. en composant avec l'automorphisme de \tilde{X} défini par $Q \frac{\partial}{\partial x}$). Par suite, il existe un relèvement au voisinage de chaque point. Comme le lieu des points U où f_0 se décompose en étale + inséparable est un ouvert non vide, ces relèvements locaux sont isomorphes en restriction à U d'après le lemme 3.3. Ces relèvements locaux se laissent donc recoller en une déformation globale. \square

Corollaire 3.5 *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme fini entre courbes propres et lisses au-dessus d'un corps algébriquement clos k . Supposons que le degré d'inséparabilité de f est $\leq p$ et que f admette une structure de morphisme rigidifié. Alors*

1. *il existe un relèvement de f sur $k[[t]]$ qui est génériquement séparable ;*
2. *il existe un anneau de valuation discrète R d'inégales caractéristiques et de corps résiduel k , et un relèvement de f sur R .*

Preuve : Le premier point est un corollaire immédiat du théorème 3.1 (choisir $\xi \neq 0$).

Pour ce qui est du second, notons g le genre de X et g' le genre de Y et considérons l'espace des modules $\text{Mor}_{g,g',\deg f}$ classifiant les morphismes de degré $\deg f$ entre courbes propres et lisses de genre g et g' . Cet espace est un champ algébrique d'après la théorie des déformations des morphismes et le théorème d'algébrisation d'Artin.

En particulier, f définit un point de $Mor_{g,g',\deg f}$. D'après le premier point, il existe un morphisme $\text{Spec} k[[t]] \rightarrow Mor_{g,g',\deg f}$ tel que l'image de $\text{Spec} k((t))$ est dans le lieu des morphismes séparables. D'après la théorie des déformations des morphismes séparables entre courbes (qui est non obstruée), il existe un anneau de valuation discrète \tilde{R} d'inégales caractéristiques et de corps résiduel $k((t))$, et un morphisme $\text{Spec} \tilde{R} \rightarrow Mor_{g,g',\deg f}$. Il s'ensuit que f est la spécialisation d'un point en caractéristique 0, il existe donc un anneau de valuation discrète R dont le corps de fractions est une extension finie de $\text{Frac} \tilde{R}$ et dont le corps résiduel est k , et un morphisme $\text{Spec} R \rightarrow Mor_{g,g',\deg f}$ qui envoie le point fermé sur f . \square

La technique utilisée ici pour déformer en égales caractéristiques ne permet pas de maîtriser R . On peut toutefois montrer, en utilisant l'algébricité de $Mor_{g,g',\deg f}$, qu'on peut prendre pour R une extension finie de l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$. nous conjecturons qu'il est possible de trouver un relèvement sur $W(k)$.

4 Quelques conditions nécessaires

Nous souhaitons donner maintenant quelques conditions nécessaires pour l'existence d'homomorphismes exacts : cf. les inéquations (1) et (2)). Celles ci sont assez grossières mais nous semblent importantes pour montrer que le fait qu'un morphisme puisse être muni d'une structure de morphisme rigidifié est assez rare.

Donnons nous un morphisme séparable $h: Z \rightarrow Y$ entre courbes propres et lisses au-dessus d'un corps k , notons $F: X \rightarrow Z$ un morphisme purement inséparable de degré p et supposons qu'il existe un homomorphisme exact $\delta: (h \circ F)^* \Omega_{Y/k} \rightarrow \Omega_{X/k}$.

Notons de plus r le degré du diviseur de ramification de h , g le genre de X (et donc de Z), et g' le genre de Y . Comme δ est injectif, on a $2g - 2 - p \deg h(2g' - 2) \geq 0$.

D'autre part, la formule de Hurwitz appliquée à h nous donne

$$2g - 2 = \deg h(2g' - 2) + r.$$

On obtient donc

$$r \geq (2g - 2)(1 - \frac{1}{p}). \quad (1)$$

En particulier, si g est ≥ 2 , alors h ne peut pas être étale.

Il est en fait possible d'être plus précis. En effet, comme vu dans le lemme 1.3, δ induit un homomorphisme injectif $h^* \Omega_Y \rightarrow F_* B_X^1$. On a donc une inclusion $H^0(Z, h^* \Omega_Y) \subset H^0(X, B_X^1)$.

L'homomorphisme d'adjonction $\Omega_{Y/k} \rightarrow h_* h^* \Omega_{Y/k}$ permet alors de construire une injection

$$H^0(Y, \Omega_{Y/k}) \rightarrow H^0(X, B_X^1).$$

La théorie des recouvrements infinitésimaux (cf. [Mil80], Proposition 4.14) permet alors de voir que $H^0(X, B_X^1) = H_{fl}^1(X, \alpha_p)$. Notant a la dimension de $H_{fl}^1(X, \alpha_p)$, on obtient

$$a \geq g'. \quad (2)$$

En particulier, si la courbe X est ordinaire (et donc également Z), ce qui impose que $a = 0$, et que $g' \geq 1$ alors f ne peut admettre de structure de morphisme rigidifié!

D'autre part, comme $\dim_k H^0(Z, h^* \Omega_{Y/k}) \geq \deg h^* \Omega_{Y/k} + 1 - g$ on trouve que

$$a \geq g - 1 - r. \quad (3)$$

5 Exemple

Considérons une courbe propre et lisse Y de genre $g' \geq 2$ qui est supersingulière, choisissons un point $\mathfrak{p} \in Y$ et considérons un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -revêtement $Z \rightarrow Y$ étale en dehors de \mathfrak{p} , et totalement ramifié en \mathfrak{p} avec une différente \mathfrak{d} qui peut être arbitrairement grande (cf. [Kat86] pour la construction de tels revêtements) de sorte que le genre g de Z vérifie

$$2g - 2 = p^n(2g' - 2) + \mathfrak{d}$$

et

$$1 - p_Z = p^n(1 - p_Y) - (p^n - 1)$$

d'après [Cre84] Corollary 1.8 (on note p_Z et p_Y les p -rangs de Z et de Y).

Comme $p_Y = 0$ on trouve que $p_Z = 0$, c'est-à-dire que Z est également supersingulière.

Notons $F: X \rightarrow Z$ le frobenius relatif. En particulier, X est également supersingulière d'après le théorème de descente des morphismes étales par des morphismes purement inséparable. On a alors

$$\begin{aligned} h^0(\Omega_X \otimes F^* h^* \Omega_Y^\vee) &\geq \chi(\Omega_X \otimes F^* h^* \Omega_Y^\vee) = \\ &\deg(\Omega_X \otimes F^* h^* \Omega_Y^\vee) + 1 - g = \\ &g - 1 - p^{n+1}(2g' - 2) = (1 - 2p)p^n(g' - 1) + \frac{\mathfrak{d}}{2} \end{aligned}$$

En particulier, pour \mathfrak{d} suffisamment grande (p^n et g' fixés), on aura $h^0(\Omega_X \otimes F^* h^* \Omega_Y^\vee) > 0$.

D'autre part, on a

$$H^0(X, \Omega_X \otimes F^* h^* \Omega_Y^\vee) \stackrel{\text{adjonction}}{=} H^0(Z, F_*(\Omega_X) \otimes h^* \Omega_Y^\vee) \subset H^0(Z, F_*(\Omega_X)) = H^0(X, \omega_X)$$

l'inclusion étant obtenue via le choix (non canonique) d'une injection $\Omega_Y^\vee \rightarrow Y$ qui existe car $g' \geq 2$.

Considérons maintenant l'opérateur de Cartier $C: H^0(X, \Omega_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X)$. Comme X est supersingulière, l'opérateur C est nilpotent. Par suite, comme $H^0(X, \Omega_X \otimes F^* h^* \Omega_Y^\vee) \subset H^0(X, \Omega_X)$ est stable sous C (l'opération de C ne se

fait que sur le premier terme de $\Omega_X \otimes F^*h^*\Omega_Y^\vee$, il existe un élément δ non nul dans $H^0(X, \Omega_X \otimes F^*h^*\Omega_Y^\vee)$ dont l'image par C est nul, c'est-à-dire un élément de $H^0(Z, F_*B_X^1 \otimes h^*\Omega_Y^\vee)$.

Remarque 5.1 Au moins si $n = 1$, la procédure précédente permet de construire une famille non isotriviale de dimension $\lfloor \frac{0}{p} \rfloor$ (cf. la théorie d'Artin-Schreier). C'est-à-dire de dimension $\frac{2g-2-p(2g'-2)}{p}$.

Références

- [Cre84] R. Crew, *étale p -covers in characteristic p* , Compos. Math. **52** (1984), 31–45.
- [DM69] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. :36 (1969), 75–109.
- [Kat86] N. Katz, *Local-to-global extensions of representations of fundamental groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **36** :4 (1986), 69–106.
- [Mil80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [Ran89] Ziv Ran, *Deformations of maps*, Algebraic curves and projective geometry (Trento, 1988), Lecture Notes in Math., vol. 1389, Springer, 1989, pp. 246–253.